SISTEMAS FORMAIS

#05 *indução sobre teoremas*

INDUÇÃO MATEMÁTICA

Vamos relembrar inicialmente o princípio da indução matemática

INDUÇÃO MATEMÁTICA

Seja $S(n)$ uma sentença que depende de um número natural n.

Para provar que $S(n)$ vale para todo $n \geq 1$, é suficiente provar que:

INDUÇÃO MATEMÁTICA

Passo básico: $S(1)$ é verdadeira

Passo indutivo: para $n \geq 1$, $S(n) \Rightarrow S(n+1)$

INDUÇÃO COMPLETA

Seja $S(n)$ uma sentença que depende de um número natural n.

Para provar que $S(n)$ vale para todo $n \geq 1$, é suficiente provar que:

INDUÇÃO COMPLETA

Passo básico: $S(1)$ é verdadeira

Passo indutivo: para $n \geq 1$, Se $S(1)$, $S(2), \ldots, S(n)$ são verdadeiras, então $S(n+1)$ também é verdadeira

Indução sobre teoremas

INDUÇÃO SOBRE TEOREMAS

Seja S um sistema formal e P uma propriedade que se aplica às fórmulas de S.

Queremos demonstrar que todos os teoremas de S possuem essa propriedade P.

INDUÇÃO SOBRE TEOREMAS

1. Todos os axiomas de S possuem a propriedade P

2. Para cada regra de inferência de S, provamos que se as suas premissas possuem a propriedade P então a conclusão também possui.

preserva a propriedade

Ideia geral

Consideremos uma prova de um teorema A:

1. A_1
2. A_2

$\vdots$

n. $A_n = A$

Ideia geral

Consideremos uma prova de um teorema A:

1. A_1
2. A_2

$\vdots$

n. $A_n = A$

Ideia geral

Consideremos uma prova de um teorema A:

1. A_1
2. A_2

$\vdots$

n. $A_n = A$

Ideia geral

Consideremos uma prova de um teorema A:

1. A_1
2. A_2

$\vdots$

n. $A_n = A$

Indução sobre teoremas

- Se os axiomas possuem uma dada propriedade

- e as regras de inferência preservam essa propriedade,

então podemos afirmar que todo teorema do sistema possui a propriedade em questão.

Demonstração

da indução sobre teoremas

Indução sobre teoremas

TEOREMA: Seja F um sistema formal e Q uma propriedade das fórmulas de F.

Para provar que todo teorema de F possui a propriedade Q, é suficiente provar que:

Indução sobre teoremas

(H1) - Todo axioma possui a propriedade Q

(H2) - Para cada regra de inferência, se cada hipótese possui a propriedade Q, então a conclusão também possui.

Prova: por indução completa

Indução sobre teoremas - prova

Seja S(n) = “todo teorema com uma prova de n passos possui a propriedade Q”.

Usaremos indução completa para mostrar que S(n) vale para todo $n \geq 1$.

Indução sobre teoremas - prova

Passo básico: S(1) é um teorema de um passo, ou seja, um axioma.

Todo axioma possui a propriedade Q (hipótese H1). ■

Indução sobre teoremas - prova

Passo indutivo:

Seja n>=1 e assumimos que S(1), S(2), ..., S(n) sejam todas verdadeiras.

Queremos mostrar que todo teorema de n+1 passos possui também a propriedade Q.

Indução sobre teoremas - prova

Seja A uma prova de n+1 passos:

(1) A_1
(2) A_2
⋮
(n) A_n
(n+1) $A_{n+1} = \mathrm{A}$

Foi obtida de fórmulas anteriores por meio de uma regra de inferência.

Pela hipótese H2, ela possui a propriedade Q se as premissas possuírem.

Mas as premissas são teoremas, e pelo passo indutivo, elas possuem a propriedade Q.

Indução sobre teoremas - prova

Seja A uma prova de n+1 passos:

(1) A_1
(2) A_2
$\vdots$
(n) A_n
(n+1) $A_{n+1} = \mathrm{A}$

‘A’ possui a propriedade Q

Mostramos que S(n+1) é verdadeira e, pelo princípio da indução completa, concluímos que todo teorema possui a propriedade Q. ■

Finalizando

RESUMO

Neste vídeo,

- Falamos sobre indução sobre teoremas
- No próximo episódio, utilizarei esta ferramenta para demonstrar que o todo teorema do sistema MAIS é verdadeiro (em um certo sentido)

SISTEMAS FORMAIS

Episódio #05
INDUÇÃO SOBRE TEOREMAS

NÚMERO IMAGINÁRIO

numeroimaginario.com.br

vinicius@numeroimaginario.com.br